Nombre (padrón): ....

8/06/2023. Primer recuperatorio de Análisis Matemático III. Curso 5

Para aprobar, se requiere resolver **3** *ejercicios* correctamente justificados.

1. Se tiene la función $f(z) = \dfrac{e^z}{(z+\pi)^2} + \dfrac{z}{z-\pi}$. **a)**Hallar un desarrollo en serie Laurent válida para analizar la singularidad $z = -\pi$ indicando correctamente su región de convergencia. **b)** A partir de esta serie determinar el tipo de singularidad dicho punto y el valor del residuo.

2. **a)** Hallar una transformación conforme que transforme la región $D = \{z = z + iy \in \mathbf{C} : y \in (0,1), x < 0\}$ en el interior de la circunferencia unitaria centrada en el origen.
b) Hallar una transformación conforme que transforme el interior de la circunferencia unitaria centrada en el origen en la región $\Delta = \{z = z + iy \in \mathbf{C} : x + y > 0\}$. ¿Cuál es la imagen de los puntos $z = 1, i, -1, -i$ a través de dicha transformación?

3. Sea f una función entera tal que $max\ \{|f'(z)|, z \in \mathbb{C}\} = 5$, $f(1) = 4+2i$ y $f(-1) = -2-6i$. Halle el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en $z = 0$ y determine su región de convergencia.

4. Hallar, si es posible, una serie de potencias de la forma $S_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-4+2i)^n$ que converja en $z = i$ y diverja en $z = 1+i$. ¿Es posible con una serie de la forma $S_2 = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-4+2i)^n$? Justificar adecuada y correctamente.

5. Determinar para qué valores de γ y δ la función $\psi(x,y) = y(\delta x^2 - y^2) + \dfrac{y-\gamma}{y^2+(x-\gamma)^2}$ es armónica. Si es posible, escriba la función $f(z) = \phi + i\psi$ holomorfa y calcule $\displaystyle\oint_{|z|=5} \frac{f(z)}{z} dz$.